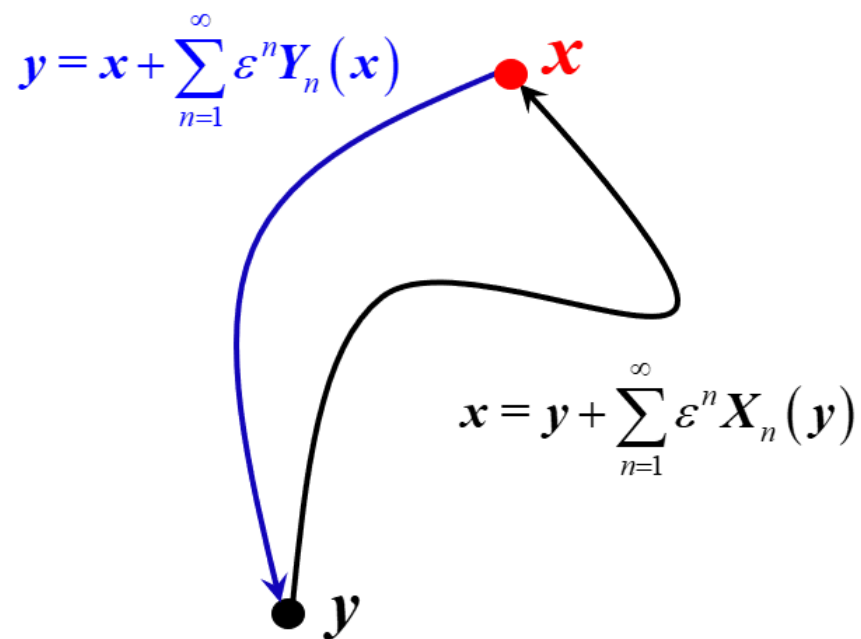


# 摄动方法与理论

雷汉伦 编著



## 简介

摄动方法与理论是天体力学与航天动力学的核心内容，是研究近可积系统的分析理论，在太阳系、系外行星、恒星系统等动力学研究中都有着非常重要的应用。本书着重介绍求解动力学方程的各种摄动分析方法以及基于正则变换的摄动理论，具体包括摄动分析方法、摄动函数展开、正则变换理论、平均化理论、von Zeipel 变换理论、Lie 级数变换理论、一般摄动理论、Wisdom 摄动理论以及 Henrard 摄动理论。结合具体的非线性振动系统以及天体力学问题，如 Duffing 自由(或受迫)振动方程、三角平动点稳定性曲线、平动点轨道分析解、平运动共振、长期动力学、平动点非线性稳定性、卫星主问题、轨旋共振、Eccentric von Zeipel-Lidov-Kozai 效应等主题，介绍摄动理论的具体应用和最新的研究进展。每章节后面给出适量的习题，供读者思考。

本书可作为我国高等学校天文类、数学类和物理类专业高年级本科生或研究生在摄动理论课程中的教材或参考书，也可供有关科研人员参考。

## 序言

摄动理论是伴随着天体力学的发展而诞生的一门非常重要的分支学科，主要是用分析方法研究各种摄动力学环境下天体的运动问题。天体力学家拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、拉格朗日(Lagrange)、勒维耶(Le Verrier)等是早期摄动理论的奠基人。19世纪中后期，德洛勒(Delaunay)、希尔(Hill)、汉森(Hansen)等在研究月球、大行星、小行星以及自然卫星等天体的运动过程中，创立了各种形式的摄动理论。数学家庞加莱(Poincaré)总结了这时期的摄动理论研究成果，指出新摄动理论的发展方向，进而奠定了天体力学定性理论的基础。

随后，一系列摄动分析方法得以发展，例如重正规化方法、Lindstedt-Poincaré方法、多尺度方法、常数变易法、平均化方法、推广平均化方法以及渐近法(KBM方法)等，为分析求解非线性扰动方程提供了强大的理论工具。同时，基于哈密顿系统的隐式变换方法(例如 Lindstedt 变换、von Zeipel 变换)被提出来。进入 20 世纪中期，出于对显式变换理论的迫切需求，基于 Lie 级数的正则变换理论应运而生，并在非线性稳定性、太阳系天体长期动力学、卫星轨道分析理论等方面得到广泛而深刻的应用。作为 20 世纪最伟大数学成就之一的 KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)理论，在太阳系天体的轨道稳定性研究中有着非常重要的应用。

1981 年，我作为合作者出版了专著《摄动理论》(科学出版社，1981 年出版，合作者为易照华先生)，详细地总结了摄动的理论基础。40 多年过去，摄动理论得到了进一步的发展和补充，并且在不同尺度的天体物理系统中得到广泛的应用。因此，系统地介绍摄动理论的最新发展非常必要。

我很高兴地看到本书作者在摄动理论这一经典且基础的领域开展系统的研究工作，并将他近些年的研究成果整理成一本著作，非常不易。为此，作者做了大量准备并花了很多时间来完成这本书的撰写。

本书内容方面具有如下特点。**首先是物理图像直观。**作者尝试将晦涩难懂的摄动方法所蕴含的内涵通过直观的物理图像揭示出来，帮助读者更好地理解基础理论。**第二是涵盖内容系统。**本书非常系统全面地论述了如下几个专题：

Lindstedt-Poincaré 方法、Lie 级数变换理论、摄动函数展开、平运动共振、长期动力学(平均化原理)、Wisdom 摄动理论、Henrard 摄动理论以及 von Zeipel-Lidov-Kozai 效应。第三是研究实例丰富。作者为 Lie 级数变换理论、Wisdom 摄动理论、Henrard 摄动理论等的应用提供了丰富的实例(部分实例来自研究工作), 有效地帮助读者理解这些理论的内涵, 同时为读者在实际问题中应用这些理论提供参考范式。第四是主体内容前沿。本书的内容大部分来自于作者自己或他人近些年的研究工作, 内容选取方面紧跟前沿。例如中心流形的统一分析理论是 2024 年初提交到 Arxiv 上的最新研究工作, 作者意识到它的重要性并将其引入该书(见第四章第 4 节)。

本书作为摄动方法与理论的著作, 对于读者系统地了解摄动理论及其在具体问题中的应用具有重要的参考价值。我期待该书的出版能够得到天体力学、航天动力学、飞行力学等相关学科研究人员的关注, 并推动摄动理论及应用研究不断深入。

南京大学教授

中国科学院院士



2024 年 3 月于南京

## 前言

摄动分析理论和共振动力学是天体力学的两大核心内容。从宏观角度来看,摄动分析对于认识、理解并解决实际问题具有非常重要的指导意义。首先,它是一种普适且有效的分析方法,无论是非线性代数方程、微分方程还是积分方程,几乎都可以通过摄动分析,获得扰动系统的摄动解。其次,从求解问题的范式而言,摄动分析提供了一种解决复杂问题的思维模式,即可从退化问题的解出发,逐次逼近至原问题的解。第三,摄动分析是一种研究复杂问题的方法论,蕴含了主与次、简单与复杂的关系。

笔者从 2018 年开始关注天体力学与航天动力学问题中的摄动分析理论。在意大利罗马一大做访问学者期间(2017.12-2018.12),合作者 Christian 教授和 Emiliano 助理教授正在开展太阳系自然卫星或小行星附近科学轨道设计(design of science orbits)方面的工作,笔者因此接触到了双平均<sup>1</sup>(double averaging technique)的概念,打开了关注摄动理论的窗口。笔者随后开展了半长轴之比任意阶的长期演化模型、双星系统高精度长期演化模型以及强摄动等级式系统下的高精度长期演化模型等方面的研究工作(见本书第八章内容)。2018 年底,笔者注意到 Namouni 和 Morais 开展了适用于任意倾角行星摄动函数展开的工作,被其深深吸引。在此基础上,为解决三维平运动共振的分析和数值结果不一致的问题,笔者建立了统一的哈密顿模型,准确描述任意倾角的共振动力学特征。2019 年,笔者进一步开展了平面顺行和平面逆行平运动共振的相关工作(见第七章)。在 2020-2021 年期间,笔者提出一种适用于任意半长轴之比、任意倾角的行星摄动函数展开,并建立了描述内共振、共轨共振以及外共振的统一哈密顿模型。2021-

---

<sup>1</sup> 平均化为最低阶摄动处理。

2022 期间，笔者系统研究了 Eccentric von Zeipel-Lidov-Kozai (ZLK)效应，从 Wisdom 摄动理论以及 Henrard 摄动理论等角度，揭示了 Eccentric ZLK 效应引起轨道翻转的动力学本质(见本书第十一章)。最近(2023-)，笔者与研究生一起系统的研究了 Lie 级数变换理论，在统一符号框架下，详细推导了 Lie 级数变换的摄动分析方程组，对比了不同变换方式之间的异同。

以上系列研究工作撑起了笔者脑海中构思的摄动分析理论的基本框架，于是萌生了开设一门系统介绍摄动方法与理论课程的想法。在 2023 年的秋季学期，这一想法终于得以实现。然而，授课和编写讲义的过程充满了极大的挑战：没有现成的教材，没有可参考的内容框架，摄动理论的大量数学语言描述使得内容艰深、晦涩。无论是上课还是编写讲义，笔者都试图站在高处看待具体的摄动方法，即首先建立直观的物理图像，然后再慢慢进入细节。在讲义的基础上，笔者进一步扩充摄动分析理论的基础知识，进行了大量的公式推导，使得该书独立、严谨并完整。在内容安排上尽量遵循从简单到复杂的思维逻辑，期望做到循序渐进。在介绍方法部分，选择的例题力求简单且具有代表性。

我期望这不仅仅是一本内容厚重的书，更希望它是一本开启读者思考与进一步探索的书，是一本引领读者看到摄动分析“内涵美”的书。写作过程中笔者多次感叹摄动分析方法在理论层面的优雅以及在解决实际问题方面的强大。因此，在书中读者时常会看到笔者的思考与评论。

全书共分十一章。第一章介绍摄动分析的概念、摄动分析与天体力学(乃至天文学)的发展、摄动分析的数学基础以及从摄动分析角度求解代数方程、积分方程、微分方程等。力求对摄动分析有一个整体的把握。第二章和第三章分别以两个经典的非线性系统为例(均为奇异摄动问题)，着重介绍各种摄动分析方法的基

本思想,包括直接展开法、重正规化方法、Lindstedt-Poincaré 方法、常数变易法、多尺度方法、平均化方法、推广的平均化方法以及 KBM 方法(渐近法)。第四章将摄动分析方法应用于天体力学或航天动力学中的几个经典问题,包括编队构型、Halo 轨道、中心流形和不变流形、椭圆型限制性三体系统下三角平动点的稳定曲线以及受摄二体问题等。第五章则系统介绍哈密顿动力学以及摄动理论,包括哈密顿模型的建立、正则变换基础、Arnold action-angle 变量的引入、平均化理论、Lindstedt 变换、von Zeipel 变换、Lie 级数变换(包括四种不同的 Lie 级数变换的实现方法)以及一般摄动理论。本章同时配以简单且经典的例子,介绍不同变换方法在实际求解问题中的应用。最后以卫星主问题为专题,分别介绍 von Zeipel 变换和 Lie 级数变换的应用。第六章系统介绍摄动函数展开,包括第三体摄动函数展开(包括平面圆型顺行、平面圆型逆行、平面椭圆型、低倾角椭圆型构型、任意倾角摄动函数展开、任意半长轴之比摄动函数展开、等级式系统摄动函数展开)、非球形摄动函数展开、轨-旋耦合摄动函数展开等,为哈密顿模型的建立以及摄动理论之应用奠定基础。第七章以摄动函数展开为基础进一步介绍平面顺行、平面逆行以及三维的平运动共振动力学的研究。第八章介绍限制性和非限制性等级式系统的长期演化模型,包括限制性和非限制性等级式系统下八极矩模型建立、限制性和非限制性系统双平均摄动函数之间的过渡、(半长轴之比)任意高阶长期演化模型建立、双星系统高精度长期演化模型以及强摄动系统高精度长期演化模型。第九章和第十章分别介绍 Wisdom 摄动理论(绝热不变近似理论)和 Henrard 摄动理论,并以笔者近期的研究工作为例介绍其应用。第十一章以专题形式介绍天体力学中非常重要的动力学现象—von Zeipel-Lidov-Kozai (ZLK)效应,着重介绍 Henrard 摄动分析方法在 Eccentric ZLK 效应中的应用。

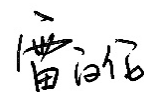
本书的第二章和第三章，在写作思路方面借鉴了国外教材《摄动方法导引》(Nayfeh 著，宋家骢编译)，并融入国内学者的部分工作以及笔者对相关问题的深入理解。尤其是推广平均化方法，可以用来直观理解人造卫星轨道理论中的小参数幂级数解、平均根数理论以及拟平均根数理论等。需说明的是，毕竟本书的重点不在人造卫星轨道理论方面，因此在这些问题上尽量做到点到为止，以免喧宾夺主。书中公式和推导非常多，读者可能会遇到阅读方面的困难。这里引用一句我在课堂上常说的话“理解演绎的思路(或理论背后的物理图像)是关键，适当忽略公式推导的具体细节”。

在本书完稿过程中，笔者得到了很多前辈、同行和朋友的关心与支持。感谢南京大学教授、中国科学院院士孙义燧长期以来对笔者生活与事业的关心与引导，并在百忙中为本书作序。感谢泰山学院宫衍香教授，他非常耐心地通读初稿全部内容并提出非常多建设性修改意见(细致到标点符号方面的意见)。感谢南京大学侯锡云教授的鼓励与支持，感谢上海天文台廖新浩研究员的肯定与建议。感谢研究生赵舜景在我备课过程中提供的帮助以及提供中心流形统一分析理论这部分的计算结果，感谢高豪同学在三角平动点稳定性曲线部分(见第四章)提供的帮助并对初稿文字部分提供的修改建议，感谢谢天怡同学帮助绘制了第三章的部分示意图，感谢冷筱妍同学寒假期间阅读初稿并提供建议。感谢天文与空间科学学院各位领导的关心与支持。感谢南京大学出版社吴汀与姜男编辑的辛勤付出。感谢2023年秋季学期选修“摄动方法与理论”课程的同学们，你们的学习热情是我撰写这本书的原初动力。最后，特别感谢我的妻子明慧及家人给予的强大支持和鼓励。



感谢南京大学天文与空间科学学院本科教学经费对本书出版的大力支持。同时，本书得到了国家自然科学基金(12073011,12233003)以及国家重点研发计划(2019YFA0706601)的经费支持。

这是一本承载了作者科研与教学理想的书，尽管撰写过程充满困难，但收获了喜悦与充实。作者深知一本教材或专著的分量，对于初学者抑或深造者的重要性不言而喻。因此，作者怀着极大的使命感战战兢兢地完成这本书的写作，总希望写得更完美一些。然而，限于作者学识水平，书中难免存在错误和疏漏之处，敬请读者批评指正。



2024年2月于南京